YTU FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

Bahri Yiğit KAYA 18025016

Danışman: Prof. Dr. Erdal GÜL

ÖZET

Bu çalışma, iç çarpım uzayları üzerindeki lineer dönüşümleri inceleyerek, vektör uzaylarındaki matematiksel ve geometrik özellikleri anlamayı amaçlamaktadır. bu dönüşümlerin iç çarpım uzaylarındaki teorik temellerini ele alarak, matematiksel modelleme ve çeşitli uygulama alanlarında nasıl kullanılabilecekleri konusunda bir anlayış sunmayı hedeflemektedir. Çalışmada sırasıyla iç çarpım uzayı ve lineer dönüşümün tanımı daha sonrasında iç çarpım uzayları üzerinde lineer dönüşümler ve onunla ilgili özel dönüşümlerin bazı tanım ve teoremlerine yer verilmiştir.

ÖN BİLGİLER

İÇ ÇARPIM UZAYI

Tanım: V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (\alpha,\beta) &\to \langle \alpha,\beta\rangle = \alpha\cdot\beta \end{aligned}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\langle , \rangle$ fonksiyonuna V üzerinde bir **iç çarpım fonksiyonu**, V vektör uzayına da bir **iç çarpım uzayı** denir.

- Simetri Özelliği: $\forall\alpha,\beta \in V$ için $\langle\alpha,\beta\rangle = \langle\beta,\alpha\rangle$
- Bilineerlik Aksiyomu: $\forall\alpha,\beta,\gamma \in V$ ve $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ için

- $\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle = \langle\alpha,\gamma\rangle + \langle\beta,\gamma\rangle$
- $\langle\alpha,\beta+\gamma\rangle = \langle\alpha,\beta\rangle + \langle\alpha,\gamma\rangle$
- $\langle\lambda\alpha,\beta\rangle = \lambda\langle\alpha,\beta\rangle$
- $\langle\alpha,\lambda\beta\rangle = \lambda\langle\alpha,\beta\rangle$

  veya $\forall\alpha,\beta,\gamma \in V$ ve $\forall\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ için

- $\langle\lambda\alpha+\mu\beta,\gamma\rangle = \lambda\langle\alpha,\gamma\rangle + \mu\langle\beta,\gamma\rangle$
- $\langle\alpha,\lambda\beta+\mu\gamma\rangle = \lambda\langle\alpha,\beta\rangle + \mu\langle\alpha,\gamma\rangle$

- Pozitif Tanımlılık: $\forall\alpha \in V$ için $\langle\alpha,\alpha\rangle \in \mathbb{R}, \langle\alpha,\alpha\rangle \geq 0$ ve $\langle\alpha,\alpha\rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha = \vec{0}$

LİNEER DÖNÜŞÜM

Tanım 1.2: V ve W, aynı $\mathfrak{I}$ cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $A: V \to W$ bir dönüşüm olsun. A dönüşümü;

1) $A(\alpha+\beta) = A(\alpha) + A(\beta), \forall\alpha,\beta \in V$

2) $A(c\alpha) = cA(\alpha), \forall\alpha \in V, \forall c \in \mathfrak{I}$

özelliklerini sağlıyorsa A' ya V den W' ya bir **lineer dönüşüm** (**operatör, homomorfizma**) denir.

İÇ ÇARPIM UZAYLARI ÜZERİNDE LİNEER DÖNÜŞÜMLER

Tanım: $V, \mathfrak{I}$ cismi üzerinde bir iç çarpım uzayı olsun. V^*, V' nin dual uzayı ve $p \in V$ olmak üzere $\forall\alpha \in V$ için

$$\begin{gathered} \Gamma: V \to V^* \\ p \to \Gamma_p: V \to \mathfrak{I} \\ \alpha \to \Gamma_p(\alpha) = \langle\alpha,p\rangle \end{gathered}$$

fonksiyonu tanımlanır.

Teorem: V , $\mathfrak{I}$ cismi üzerinde bir iç çarpım uzayı ve V^*, V' nin dual uzayı olsun. $\Gamma: V \to V^*$, $\Gamma_p(\alpha) = \langle\alpha,p\rangle$ fonksiyonu lineerdir.

Teorem: V iç çarpım uzayından tanımlı $\Gamma: V \to V^*$ dönüşümü bir lineer izomorfizmdir.

Tanım: V bir iç çarpım uzayı ve V^* da V' nin dual uzayı olsun.

$$\begin{gathered} \Gamma: V \to V^* \\ p \to \Gamma_p: V \to \mathfrak{I} \\ \alpha \to \Gamma_p(\alpha): \langle\alpha,p\rangle \end{gathered}$$

izomorfizmine bir **iç çarpım izomorfizmi** denir.

Tanım: V n-boyutlu bir iç çarpım uzayı ve $A: V \to V$ lineer dönüşümü verilsin. $\Gamma: V \to V^*$ iç çarpım izomorfizmi yardımıyla tanımlanan $A^*: \Gamma^{-1}A^t\Gamma: V \to V$ dönüşümüne A' nın **eki (adjointi)** denir.

Teorem: V iç çarpım uzayı üzerinde tanımlı $A: V \to V$ lineer dönüşümünün A^* eki lineerdir.

Teorem: V bir iç çarpım uzayı ve $A: V \to V$ lineer dönüşümü olsun. A^*, A' nın eki olmak üzere $\forall\alpha,\beta \in V$ için $\langle A(\alpha),\beta\rangle = \langle\alpha, A^*(\beta)\rangle$ eşitliği sağlanacak şekilde bir tek A^* vardır.

Teorem: V n-boyutlu bir kompleks iç çarpım uzayı olsun. $A: V \to V$ lineer dönüşümü ve $\forall X \in V$ için $\langle A(X),X\rangle = 0$ ise $A = 0$ dır.

Tanım: $V, \mathfrak{I}$ cismi üzerinde bir iç çarpım uzayı ve $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ sistemi V' nin bir ortonormal bazı olsun. $A: V \to V$ lineer dönüşümünün matrisi $A(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_i, 1 \leq j \leq n$ olmak üzere $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ olduğunu biliyoruz. Benzer şekilde $A^*: V \to V$ **ek dönüşümünün matrisi**

$$A^*(\alpha_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\alpha_i, 1 \leq k \leq n$$

olmak üzere $A^* = [b_{ik}]$ olsun. Ayrıca $\langle A(\alpha_j),\alpha_k\rangle = \langle\alpha_j, A^*(\alpha_k)\rangle$ ve

$\langle A(\alpha_j),\alpha_k\rangle = a_{kj}$ ve $\langle\alpha_j, A^*(\alpha_k)\rangle = \overline{b_{jk}}$ olmak üzere $a_{kj} = \overline{b_{jk}}$ olduğu için $A^* = \bar{A}^t$ bulunur.

İÇ ÇARPIM UZAYLARI ÜZERİNDE ÖZEL DÖNÜŞÜMLER

Hermit Dönüşümleri

Tanım: V n-boyutlu kompleks iç çarpım uzayı ve $A: V \to V$ lineer dönüşüm olsun. $\forall X,Y \in V$ için

$\langle A(X),Y\rangle = \langle X, A(Y)\rangle$

özelliği sağlanıyorsa A ya V de bir **Hermit dönüşümü**

$\langle A(X),Y\rangle = -\langle X, A(Y)\rangle$

özelliğini sağlıyorsa A ya V da bir **ters Hermit dönüşümü** denir.

Teorem: V kompleks iç çarpım uzayı olsun. $A: V \to V$ dönüşümünün Hermit dönüşümü olması için gerek ve yeter şart $\forall X \in V$ için $\langle A(X),X\rangle \in \mathbb{R}$ olmasıdır.

Teorem: V kompleks iç çarpım uzayı olsun. $A: V \to V$ lineer dönüşümü için aşağıdaki önermeler birbirlerine eşdeğer niteliktedir.

i) A bir Hermit dönüşümdür.
ii) $\langle A(X),Y\rangle = \langle X, A(Y)\rangle, \forall X,Y \in V$
iii) V' nin bir ortonormal bazına göre A dönüşümüne bir A Hermit matrisi karşılık gelir.

Özellik: Bir Hermit matrisinin tersi de bir Hermit matrisidir

Özellik: A ve B iki Hermit matrisi ise $A+B$ ve $A-B$ matrisleri de Hermit matrisidir.

Simetrik Dönüşümler

Tanım: V reel iç çarpım uzayı ve $A: V \to V$ lineer dönüşüm olsun. $\forall X,Y \in V$ için

$\langle A(X),Y\rangle = \langle X, A(Y)\rangle$ özelliği sağlanıyorsa A ya V üzerinde **simetrik dönüşüm (self adjoint dönüşüm)** ve $\langle A(X),Y\rangle = -\langle X, A(Y)\rangle$ özelliğini sağlıyorsa A ya V üzerinde **ters simetrik dönüşüm** denir.

Özellik: V bir reel iç çarpım uzayı ve $B_1, B_2, \ldots, B_m$ de V' nin birer simetrik dönüşümleri olsun. $B_1{}^2 + B_2{}^2 + \cdots + B_m{}^2 = 0$ iken $B_1 = B_2 = \cdots = B_m = 0$ olur.

İzometri (İç çarpımı koruyan dönüşümler)

Tanım: V ve W iki iç çarpım uzayı ve $A: V \to W$ lineer dönüşüm olsun. $\forall X,Y \in V$ için $\langle (AX),(\mathrm{A}Y)\rangle = \langle (X,Y)\rangle$ özelliği sağlanıyorsa A ya **izometri** veya **iç çarpımı koruyan dönüşüm** denir.

Teorem: V ve W iki iç çarpım uzayı ve $A: V \to W$ lineer dönüşüm olsun. A' nın bir izometri olması için gerek ve yeter şart $\forall\alpha \in V$, $\| A(\alpha) \| = \| \alpha \|$ olmasıdır.

Üniter Dönüşümler

Tanım: V kompleks iç çarpım uzayı olsun. $A: V \to V$ lineer dönüşümü $\forall X,Y \in V$ için $\langle A(X),A(Y)\rangle = \langle X,Y\rangle$ özelliğini sağlanıyorsa A dönüşümüne **üniter dönüşüm** denir.

Teorem: V kompleks iç çarpım uzayı olsun. Bir $A: V \to V$ lineer dönüşümünün üniter olması için gerek ve yeter şart $A^*A = I$ olmasıdır.

Teorem: V kompleks iç çarpım uzayı ve $A: V \to V$ lineer dönüşüm olsun. Aşağıdaki önermeler eşdeğerdir.

1) A üniterdir.

2) A, V deki normları korur. Yani $\forall X \in V$ için $\| A(X) \| = \| X \|$.

3) $\forall X \in V$ birim vektörü için $A(X)$ de birim vektördür.

Ortogonal Dönüşümler

Tanım: V reel iç çarpım uzayı ve $A: V \to V$ lineer dönüşüm olsun. $\forall X \in V$ için $\langle A(X),A(X)\rangle = \langle X,X\rangle$ yani $AA^* = A^*A = I$ özelliğini sağlıyorsa A lineer dönüşümüne V' nin bir **ortogonal dönüşümü** denir.

Teorem: V bir iç çarpım uzayı ve $A: V \to V$ ortogonal dönüşüm olsun. Eğer $S: V \to V$ self adjoint dönüşüm (simetrik) ise $A^{-1}SA: V \to V$ dönüşümü de self adjointtir.

Normal Dönüşümler

Tanım: V, $\mathfrak{I}$ cismi üzerinde bir iç çarpım uzayı ve $A: V \to V$ lineer dönüşüm olsun. Eğer $AA^* = A^*A$ ise A ya **normal dönüşüm** denir.

Teorem: V bir kompleks iç çarpım uzayı ve $A: V \to V$ normal dönüşüm olsun. O halde $\forall X,Y \in V$ için $\| A(X) \| = \| A^*(X) \|$ eşitliği sağlanır.

Özellik: A bir normal dönüşüm ise $A^n = 0$ olur.

KAYNAKÇA

[1] Yüce, S., “ *LİNEER CEBİR* ”, 2. Baskı , PEGEM AKADEMİ , Ankara , 2019
[2] Axler, S., “ *Linear Algebra Done Right* “, (S. Axler, F.W Gehring, K.A Ribet), Second Edition, Springer, New York, 1997
[3] Rynne, B.P. and Youngson, M.A., “Linear Analysis Functional”, Second Edition, Springer, Edinburgh, 2008